

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В. Л. ОЛЕЙНИК

Санкт-Петербургский государственный университет

RECURRENT RELATIONS AND DIFFERENCE EQUATIONS

V. L. OLEINIK

The basic concepts of the theory of infinite sequences and their presentations are discussed.

Рассмотрены основные вопросы теории бесконечных последовательностей и их представлений.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных понятий в математике является понятие последовательности. Задавать последовательность можно с помощью закона, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие элемент y_n некоторого множества. Элементы $y_1, y_2, \dots, y_n$ называются членами последовательности, y_1 — первым, y_2 — вторым, y_n — общим (n -м) членом последовательности.

Другой способ определения последовательности связан с введением правила, которое позволяет вычислять общий член последовательности через некоторое количество предыдущих членов $y_{n-2}, y_{n-1}, \dots$. Так мы приходим к понятию рекуррентного соотношения. Простейшими примерами последовательностей являются арифметическая и геометрическая прогрессии. В качестве еще одного классического примера можно привести последовательность чисел Фибоначчи (см. формулу (8)).

В процессе изучения последовательностей приходится иметь дело с различными утверждениями, содержащими произвольные натуральные числа. Доказательства подобных утверждений часто проводятся методом математической индукции (см. [1]).

Для конкретного рекуррентного соотношения возникает вопрос об описании всех последовательностей, для которых данное соотношение выполняется. Здесь уже возникает разностное уравнение. В статье дан обзор теории простейших рекуррентных соотношений и разностных уравнений. Пример возмущения оператора сдвига периодической функцией показывает, насколько сложными могут быть объекты изучения для разностных операторов.

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

1. Основными объектами наших рассмотрений будут числовые последовательности, то есть функции $y = y(n)$, определенные на множестве целых чисел $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ или каком-либо его подмножестве. Например, на

множестве $n = 0, 1, 2, \dots$ общий член геометрической прогрессии задается функцией

$$y(n) = aq^n, \quad q \neq 0,$$

арифметической прогрессии – функцией

$$y(n) = a + dn.$$

Последовательности сумм n первых членов этих прогрессий определяются соответственно функциями

$$y(n) = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}, \quad q \neq 1, \quad \text{и} \quad y(n) = na + \frac{dn(n+1)}{2}.$$

Выбирая конкретные значения параметров a , q и d , мы получаем числовые последовательности, определенные при $n \geq 0$.

2. Часто последовательности задаются индуктивным образом, то есть задается правило вычисления всех последующих ее членов по некоторому числу заданных предыдущих членов. Так, всякая геометрическая прогрессия со знаменателем q задается соотношением

$$y(n+1) = qy(n), \quad n \geq 0.$$

При этом конкретная прогрессия выбирается заданием числа $y(0) = a$. Аналогично арифметическая прогрессия определяется соотношением

$$y(n+1) = y(n) + d, \quad n \geq 0. \quad (1)$$

Одну и ту же последовательность можно задавать различными соотношениями. Например, формула

$$y(n+2) = \frac{y(n+1)^2}{y(n)} \quad (2)$$

при условиях $y(0) = a \neq 0$ и $y(1) = qa \neq 0$ полностью определяет геометрическую прогрессию $y(n) = aq^n$, а соотношение

$$y(n+2) = 2y(n+1) - y(n) \quad (3)$$

определяет арифметическую прогрессию $y(n) = a + nd$ при $y(0) = a$ и $y(1) = a + d$.

Упражнение 1. Проверить, что:

1) геометрическая прогрессия со знаменателем q и последовательность ее сумм удовлетворяют одному равенству

$$y(n+2) = (1+q)y(n+1) - qy(n); \quad (4)$$

2) для произвольной арифметической прогрессии и последовательности ее сумм выполнено соотношение

$$y(n+3) = 3y(n+2) - 3y(n+1) + y(n); \quad (5)$$

3) соотношению (5) удовлетворяет последовательность квадратов натуральных чисел $y(n) = n^2$, $n \geq 1$.

3. Формулы (1)–(5) суть примеры *рекуррентных соотношений*. В этих формулах при вычислении последующего члена последовательности возвращаются к значениям предшествующих членов. Название “рекуррентный” происходит от французского *récurrent* – возвращающийся (к началу).

Для описания общей ситуации рассмотрим натуральное число k и произвольную функцию $F = F(n, x_1, x_2, \dots, x_k)$, определенную при всех неотрицательных целых числах n и для всех вещественных (либо комплексных) значений икс-овых переменных.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $\{y(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$y(n+k) = F(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k-1)), \quad (6)$$

если равенство (6) выполняется для всех неотрицательных целых чисел n . Натуральное число k называется *порядком рекуррентного соотношения*.

В наших примерах (1)–(5) принято $F_1 = x_1 + d$, $F_2 = x_2^2/x_1$, $F_3 = 2x_2 - x_1$, $F_4 = (1+q)x_2 - qx_1$ и $F_5 = 3x_3 - 3x_2 + x_1$ соответственно. Здесь нет зависимости функции F от n . Чтобы устранить этот пробел, рассмотрим следующую последовательность: $y(0) = 1$ и $y(n)$ равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n при $n \geq 1$, то есть $y(n) = n!$. Данная последовательность удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$y(n+1) = (n+1)y(n). \quad (7)$$

В этом примере $F = (n+1)x_1$. Всякая последовательность, подчиняющаяся соотношению (7), имеет вид $y(n) = an!$ при $y(0) = a$.

4. Рекуррентные соотношения, с одной стороны, определяют ту или иную последовательность, а с другой – для конкретной заданной последовательности контролируют многие ее свойства. Классическим примером последовательности, задаваемой рекуррентным соотношением, является последовательность *чисел Фибоначчи*. Эта последовательность определяется формулой

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n) \quad (8)$$

при $n \geq 0$ и выбором начальных данных $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Вот несколько ее членов: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., 39 088 169, ... Многие удивительные свойства такого набора чисел изложены в популярных лекциях профессора Н.Н. Воробьева [2] (см. также [9]). Замечательные числа Фибоначчи произошли от древней задачи (1228 год) о популяции кроликов и неожиданным образом оказались пригодными в качестве системы

счисления, которая более помехоустойчива, чем двоичная система в компьютерных приложениях.

5. Для определения рекуррентного соотношения первого порядка необходимо задать некоторую функцию $f(n, x)$. Тогда вся последовательность определяется однозначно выражением $x(n+1) = f(n, x(n))$, $n \geq 0$, при заданном значении $x(0)$. Если функция f не зависит явно от дискретной переменной n , то мы имеем дело с итерациями одной функции $f = f(x)$. Именно: $x(1) = f(x(0))$, $x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0)))$ и т.д. Естественным образом возникает вопрос о стабилизации последовательности $x(n)$ при неограниченном возрастании номера n — порядка итерации. Последнее означает, что последовательность $x(n)$ имеет предел x_* при $n \rightarrow \infty$. Здесь мы имеем дело с уравнением $x = f(x)$, и члены стабилизирующейся последовательности дают приближенные значения решения x_* этого уравнения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $x = e^{-x}$. Легко найти его графическое решение. Кривые $y(x) = x$ и $y(x) = e^{-x}$ имеют одну точку пересечения x_* , $0 < x_* < 1$. Для вычисления приближенного значения этого решения надо построить последовательность $x(n)$ по правилу $x(n+1) = e^{-x(n)}$, $n \geq 0$. Полученная таким образом последовательность сходится к искомому решению x_* , причем начальным условием для итераций может служить произвольное вещественное число $x(0)$.

Этот эксперимент легко провести на любом калькуляторе, имеющем в качестве одного из действий вычисление экспоненты e^x . Например, начинаем с 0 на экране, затем вычисляем значение e^0 , меняем знак ответа с + на – и далее вычисляем очередное значение экспоненты. Так, после некоторого количества повторений последних двух операций — смена знака и вычисление экспоненты — мы приходим к стационарной последовательности (то есть далее число на экране не меняется), которая дает приближенное решение исходного уравнения при выбранном количестве знаков. Число итераций, разумеется, зависит от предполагаемой точности вычисления. Решение с помощью калькулятора Windows 95 стабилизируется на значении $x_* = 0,567\ 143\ 290\ 409\ 8$.

Для конкретно выбранной функции $f(x)$, определенной на области своих значений, поведение последовательности, порождаемой соотношением $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$, в значительной степени зависит от начальной точки итераций x_0 . Здесь мы имеем дело с динамической системой при дискретном времени n (см., например, [3]).

6. Удивительным образом рекуррентные соотношения проявляются при исследовании различных явлений природы. Вот пример из астрономии. Примем среднее расстояние от Земли до Солнца за 1 (1 а.е.),

тогда в соответствии с соотношением Тициуса–Боде [4, с. 171] расстояния d других планет от Солнца можно найти по правилу $d(n+1) = 2d(n) - 0,4$, $d(1) = 1$. Подтверждением этого правила является табл. 1, где наблюдается поразительное для космических масштабов совпадение чисел в каждой строке.

Таблица 1. Средние расстояния планет от Солнца

n	Планета	Закон Боде	Истинное расстояние, а.е.
-1	Меркурий	0,5	0,4
0	Венера	0,7	0,7
1	Земля	1,0	1,0
2	Марс	1,6	1,5
3	Малые планеты	2,8	2,8
4	Юпитер	5,2	5,2
5	Сатурн	10,0	9,5
6	Уран	19,6	19,2
7	Нептун	38,8	30,1
8	Плутон	77,2	39,5

Открытие Урана убедило астрономов в правильности соотношения Боде и стимулировало систематические поиски планеты между Марсом и Юпитером, расстояние которой было бы порядка 2,8 а.е. Так были открыты малые планеты Церера и Паллада. Явное нарушение закона Боде для Нептуна и Плутона частично исправляется, если считать их одной планетой при $n = 7$.

Автор благодарен рецензенту за замечание, “что в отличие от законов Кеплера рационального объяснения соотношению Боде небесная механика в настоящее время предложить не может”.

7. В квантовой механике и других разделах математической физики широко применяются классические ортогональные многочлены. Их определяют рекуррентными соотношениями, коэффициенты которых зависят от вещественного параметра x . Например, полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$ получают рекуррентным соотношением

$$y(n+2) = 2xy(n+1) - y(n) \quad (9)$$

и начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y(1) = x.$$

Таким образом, имеем

$$y(0) = T_0(x) = 1, \quad y(1) = T_1(x) = x, \quad y(2) = T_2(x) = 2x^2 - 1, \dots \\ \dots, \quad y(5) = T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \text{ и т.д.}$$

Замечательным свойством этих многочленов является то, что из всех многочленов степени n со старшим

коэффициентом, равным 1, наименее уклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$ многочлен $2^{-n+1}T_n(x)$. Если в формуле (9) принять начальные условия $y(0) = 1$ и $y(1) = 2x$, то получатся полиномы Чебышева второго рода $U_n(x)$. Название “ортогональные” объясняется тем, что эти полиномы удовлетворяют условиям ортогональности при правильном выборе скалярного произведения [5].

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8. Для всякого рекуррентного соотношения естественным образом возникает вопрос об описании всех последовательностей, которые удовлетворяли бы данному равенству. Так, мы приходим к понятию *разностного уравнения*. Например, для уравнения $y(n+1) = qy(n)$ любое решение однозначно определяется условием $y(0) = a$ и при этом имеет вид $\{aq^n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Определение 2. Разностным уравнением называется уравнение вида

$$F(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k)) = 0. \quad (10)$$

Функция $y = y(n)$ является решением уравнения (10) на некотором подмножестве целых чисел E , если она при подстановке в уравнение обращает его в тождество для всех n из множества E .

Название “разностное” обусловлено тем, что в численных приложениях разностное уравнение возникает при замене в дифференциальном уравнении производной $y'(x)$ на конечную разность $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$. Эта процедура имеет аналог и для производных старших порядков.

9. Наиболее развита теория линейных разностных уравнений.

Определение 3 [6]. Линейным разностным уравнением k -го порядка называется уравнение

$$a_k(n)y(n+k) + a_{k-1}(n)y(n+k-1) + \dots + a_0(n)y(n) = h(n), \quad (11)$$

где $h(n)$ и все $a(n)$ — заданные функции, причем $a_0(n)$ и $a_k(n)$ не обращаются в нуль тождественно. Если $h(n) \equiv 0$, то уравнение (11) называется *однородным*.

Из приведенных выше уравнений лишь уравнение (2) не является линейным, уравнение (1) и правило раздела 6 — линейные неоднородные, а остальные уравнения — линейные однородные.

Всякое решение разностного уравнения (11) называется его частным решением. Решение, зависящее от k произвольных параметров и такое, что любое частное решение получается из него при некотором выборе этих параметров, называется общим решением. Конкретные значения параметров находятся из каких-либо дополнительных условий. Если известны общее реше-

ние однородного уравнения (то есть уравнения (11) при $h \equiv 0$) и одно частное решение неоднородного уравнения (11), то общее решение неоднородного уравнения строится как сумма этих решений.

Пример 2. Пусть a и b — заданные числа. Рассмотрим уравнение

$$y(n+1) = ay(n) + b. \quad (12)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $y(n+1) = ay(n)$ имеет вид

$$y_0(n; c) = ca^n,$$

где c — произвольная постоянная, выбор которой в дальнейшем определяется дополнительными условиями. В качестве частного решения неоднородного уравнения (12) можно взять стационарную последовательность $y_1(n) \equiv b/(1-a)$, если $a \neq 1$, или последовательность $y_1(n) = bn$, если $a = 1$. Тогда общее решение уравнения (12) принимает вид $y(n) = y_0(n; c) + y_1(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Наконец, если задано значение $y(0)$, то постоянная $c = y(0) - b/(1-a)$ при $a \neq 1$ и $c = y(0)$ при $a = 1$.

В качестве иллюстрации применения уравнения (12) рассмотрим пример из финансовой математики.

Пример 3. Кредит в сумме 5 млрд руб. погашается ежемесячно равными взносами в течение года. Процентная ставка по кредиту установлена в размере 5% в месяц. Требуется найти сумму ежемесячного взноса при платеже в конце каждого месяца.

Решим задачу в общем виде. Пусть M — сумма кредита, k — доля ежемесячных процентных начислений, T — срок полной выплаты кредита и p — искомая сумма ежемесячного взноса. Обозначим через $y(n)$ сумму, которую мы остаемся должны после очередной выплаты в конце n -го месяца, чтобы погасить весь кредит и набравшие за n месяцев проценты. Каждый месяц выплачивается сумма p , поэтому $y(n+1) = (1+k)y(n) - p$. Таким образом, мы пришли к уравнению (12), где $a = 1+k$ и $b = -p$. Его решением при выбранном начальном условии $y(0) = M$ будет

$$y(n) = \left(M - \frac{p}{k}\right)(1+k)^n + \frac{p}{k}.$$

Из условия погашения кредита в течение периода времени T (то есть $y(T) = 0$) находим искомую сумму ежемесячных взносов p .

В нашем примере $M = 5$ млрд руб., $k = 0,05$ ежемесячно и $T = 12$ месяцев. Ответ: $p = 564$ млн 127 тыс. руб.

Уравнение (12) простое, так как его коэффициенты и неоднородность b не зависят от n . Решение произвольного линейного неоднородного разностного уравнения первого порядка $y(n+1) = a(n)y(n) + b(n)$ с переменными

коэффициентами тем не менее также можно записать в общем виде, но оно имеет значительно более сложный вид, нежели решение уравнения (12). Один из примеров дает уравнение (7). Более того, однородное уравнение $y(n+1) = a(n)y(n)$ возникает, например, в физической теории фазовых превращений вещества (см. [7]). Оно описывает равновесное состояние системы и является частным случаем уравнения Зельдовича. Его общим решением будет $y(n; c) = ca(n-1)a(n-2)\dots a(0)$.

За исключением отдельных специальных случаев, написать в явном виде общее решение произвольного линейного разностного уравнения порядка $k \geq 2$ не представляется возможным.

10. Завершенный вид имеет теория линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами (см. [6]).

Начнем с описания построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_k y(n+k) + a_{k-1} y(n+k-1) + \dots + a_0 y(n) = 0. \quad (13)$$

Покажем, что любое такое уравнение имеет в качестве частного решения геометрическую прогрессию $\{q^n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Действительно, если мы подставим эту прогрессию в уравнение (13), то после сокращения на q^n придем к алгебраическому уравнению

$$a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (14)$$

Полином от q в левой части равенства (14) называется характеристическим многочленом уравнения (13). Таким образом, корни этого многочлена дают все возможные знаменатели геометрических прогрессий, являющихся решениями уравнения (13).

Так, например, характеристический многочлен для уравнений (3) и (5) имеет единственный корень $q = 1$. Следовательно, решениями вида геометрической прогрессии для этих уравнений будут только стационарные последовательности $y(n) \equiv \text{const}$. Но мы знаем, что уравнение (3) имеет еще решение $y(n) = n$, а уравнение (5) — решения $y_1(n) = n$ и $y_2(n) = n^2$.

Как найти эти решения, не являющиеся геометрическими прогрессиями? Подобной проблемы не возникает, если у характеристического многочлена все корни простые. Тогда общее решение уравнения (13) строится как сумма всех решений вида геометрических прогрессий с произвольными постоянными множителями, а число этих постоянных будет равно степени уравнения k , как и положено в определении общего решения однородного разностного уравнения.

Например, корни характеристического многочлена для уравнения (4) равны 1 и q . Надо принять, что $q \neq 1$. Тогда общее решение имеет вид $y(n) = c_1 + c_2 q^n$, где c_1 и

c_2 — произвольные постоянные. Найдем решение с начальными условиями $y(0) = 0$ и $y(1) = a$, то есть сумму n первых членов геометрической прогрессии aq^n , $n \neq 0$. Простые вычисления дают $c_1 = -c_2 = a/(1-q)$. После подстановки этих значений для постоянных c_1 и c_2 в общее решение приходим к известной формуле для суммы геометрической прогрессии.

Однако в примерах (3) и (5) корень $q = 1$ кратный. Его кратность равна 2 и 3 соответственно. Из теории следует, что для кратных корней решения, отвечающие каждому корню q кратности $r > 1$, определяются набором последовательностей $q^n, nq^n, \dots, n^{r-1}q^n$. Объединяя все эти наборы для каждого кратного корня с решениями для простых корней, мы наберем ровно k в некотором смысле различных решений, где k равно порядку уравнения. Далее общее решение строится, как и раньше, в виде суммы всех этих решений с произвольными множителями перед ними, то есть

$$y_0(n; c_1, c_2, \dots, c_k) = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n) + \dots + c_k y_k(n). \quad (15)$$

Например, $y(n) = c_1 + c_2 n$ — общее решение уравнения (3), а $y(n) = c_1 + c_2 n + c_3 n^2$ — общее решение уравнения (5).

Упражнение 2. Показать, что решение уравнения (8) с начальными условиями $y(0) = 0$ и $y(1) = 1$ (числа Фибоначчи) можно представить в виде

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

и при этом, например, $y(38) = 39\,088\,169$, а решение уравнения (9) с начальными условиями $y(0) = 1$ и $y(1) = x$ (полиномы Чебышева первого рода) в виде

$$T_n(x) = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{-n}]$$

и при этом $y(n) = c_1 T_n(x) + c_2 U_n(x)$ — общее решение уравнения (9).

11. Зная общее решение (15) однородного уравнения, мы теперь в состоянии найти некоторое частное решение неоднородного уравнения с произвольной функцией $h(n)$ вместо нуля в правой части равенства (13). Это метод вариации произвольных постоянных: сначала в выражении (15) мы предполагаем множители c_j неизвестными функциями; далее функцию $y_0(n; c_1(n), c_2(n), \dots, c_k(n))$ подставляем в неоднородное уравнение и из получившегося тождества находим неизвестные $c_j(n)$. Поскольку число неизвестных равно k , а уравнение только одно, то мы вправе наложить еще $k-1$ произвольных дополнительных условий. При выборе этих условий учитывают то, что все функции $y_j(n)$ являются решениями однородного уравнения.

Упражнение 3. Методом вариации произвольной постоянной найти частное решение уравнения $y(n+1) = a(n)y(n) + b(n)$.

Читатель, знакомый с теорией линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, несомненно, заметил ее сходство с изложенным выше обзором теории линейных разностных уравнений.

РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

12. В этом разделе мы рассмотрим оператор сдвига T , определенный на множестве всех последовательностей комплексных чисел, бесконечных в обе стороны. Пусть задана последовательность $x(n)$. Тогда, по определению, $(Tx)(n) = x(n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и мы получаем тот же набор чисел, но со сдвинутыми на единицу номерами. Оператор T линеен, то есть $T(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Tx_1 + c_2Tx_2$ для любых двух последовательностей x_k и произвольных комплексных чисел c_k , $k = 1, 2$. Далее рассмотрим оператор умножения на функцию $a = a(n)$, именно $(ax)(n) = a(n)x(n)$ для всех n .

Используя оператор T и оператор умножения, определим линейный разностный оператор T_0 следующим образом:

$$T_0 = a_k T^k + a_{k-1} T^{k-1} + \dots + a_0.$$

Теперь уравнение (11) коротко записывается в виде

$$T_0 y = h.$$

Существенным в теории линейных операторов является вопрос о спектре оператора. Мы будем называть спектром линейного оператора T_0 множество тех комплексных λ , для которых уравнение $T_0 y = \lambda y$ имеет ограниченное решение $y(n)$, то есть $|y(n)| \leq A$ для некоторой постоянной A и всех n .

Так, например, спектр оператора T характеризуется поведением решений уже знакомого нам уравнения $y(n+1) = \lambda y(n)$. Решение $y(n; \lambda) = c\lambda^n$ будет ограниченным тогда и только тогда, когда $|\lambda| = 1$. При $|\lambda| > 1$ решение неограниченно возрастает для $n > 0$, а при $|\lambda| < 1$ — для $n < 0$. На комплексной плоскости λ спектр оператора T изображается в виде окружности единичного радиуса с центром в точке $\lambda = 0$.

Незначительное изменение рассматриваемого оператора называется его возмущением. Большую роль в различных приложениях играют линейные операторы с периодическими коэффициентами. В качестве примера рассмотрим возмущение оператора сдвига T оператором умножения на периодическую функцию и проследим за спектром возмущенного оператора.

Пусть N — натуральное число и $a = a(n)$ — функция с периодом N , то есть для всех n имеем $a(n+N) = a(n)$. Таким образом, функция a однозначно определяется

упорядоченным набором N чисел $M = \{a(0) = a_0, a(1) = a_1, \dots, a(N-1) = a_{N-1}\}$.

Для произвольного положительного числа r , $r > 0$, рассмотрим оператор $rT + a$. Соответствующее уравнение, определяющее спектр, имеет вид $ry(n+1) + a(n)y(n) = \lambda y(n)$. В силу периодичности функции a из этого уравнения непосредственно следует, что $y(n+N) = r^{-N}(\lambda - a_0)(\lambda - a_1) \dots (\lambda - a_{N-1})y(n)$. Таким образом, при переходе через период решение умножается на одно и то же число (множитель Флоке). Условие ограниченности решения тогда принимает вид

$$|\lambda - a_0| \cdot |\lambda - a_1| \dots |\lambda - a_{N-1}| = r^N. \quad (16)$$

Набор всех решений алгебраического уравнения (16) дает множество, которое совпадает со спектром оператора $rT + a$.

Кривая на плоскости λ , определяемая уравнением (16), называется лемнискатой радиуса r с N фокусами [8]. Здесь $|\lambda - a_j|$ — расстояние на плоскости от текущей точки λ до фиксированной точки (фокуса) a_j . Следовательно, лемниската задается как геометрическое место точек, произведение расстояний которых до N фиксированных точек множества $M = \{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$ есть величина постоянная и равная r^N . Например, если все точки множества M совпадают, то мы приходим к окружности с центром в этой точке и радиусом r .

Рассмотрим подробнее случай $N = 2$, на котором хорошо видны общие свойства лемнискат. Уравнение $|\lambda^2 - 1| = r^2$ задает для различных радиусов $r > 0$ лемнискаты с фокусами в точках ± 1 . Эти кривые называются овалами Кассини, из которых особую роль играет наиболее известная лемниската Бернулли ($r = 1$), имеющая точку самопересечения $\lambda = 0$. При $r > 1$ кривая состоит из одной компоненты и при $r < 1$ имеет две компоненты. При увеличении r область, охватываемая кривой, раздувается и для больших значений радиуса r лемниската близка к окружности.

Еще в 1897 году Д. Гильберт доказал [8], что для любой замкнутой плоской кривой без точек самопересечения можно указать конечное число точек и величину произведения расстояний до них, такие, что порожденная ими лемниската почти совпадает с заданной кривой. При этом точность совпадения может быть выбрана любой. Таким образом, спектр рассматриваемого оператора $rT + a$ совпадает с лемнискатой (16) и может иметь достаточно причудливую форму.

Отметим еще два любопытных факта. Если для заданного упорядоченного множества значений M функции a рассмотреть его произвольную перестановку M_1 и построить периодическую функцию $b = b(n)$ с множеством значений M_1 , то спектры операторов $rT + a$ и $rT + b$ совпадают. Далее спектр не изменится, если в

качестве M_1 взять объединение любого количества экземпляров множества M с произвольными перестановками внутри каждого экземпляра. Последнее означает, что кривая спектра сохраняется при правильном выборе периодического возмущения оператора сдвига для сколь угодно больших периодов. Эти следствия непосредственно вытекают из уравнения спектральной кривой (16). Во-первых, можно менять сомножители местами, во-вторых, уравнение можно возвести в любую ненулевую степень. В результате этих операций геометрическое место точек не изменится.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соминский И.С.* Метод математической индукции // Популярные лекции по математике. М.: Наука, 1974. Вып. 3.
2. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи // Там же. 1992. Вып. 6.
3. *Белых В.Н.* Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 1. С. 115–121.
4. *Струве О., Линдс Б., Пилланс Э.* Элементарная астрономия. М.: Наука, 1964. 467 с.
5. *Ильин В.А.* Базисы в евклидовых пространствах и ряды Фурье // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 4. С. 95–101.
6. *Маркушевич А.И.* Возвратные последовательности // Популярные лекции по математике. М.: Наука, 1983. Вып. 1.
7. *Куни Ф.М.* Физические основы теории фазовых превращений вещества // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 1. С. 108–112.
8. *Маркушевич А.И.* Замечательные кривые // Популярные лекции по математике. М.: Наука, 1978. Вып. 4.
9. *Артемьев А.А.* “Геометрия” чисел Фибоначчи и других возвратных последовательностей второго порядка // Соросовский Образовательный Журнал. 2000. Т. 6, № 9. С. 110–115.

Рецензент статьи Ю.Г. Мартыненко

* * *

Владимир Лукич Олейник, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Автор и соавтор более 30 научных работ и четырех методических пособий.